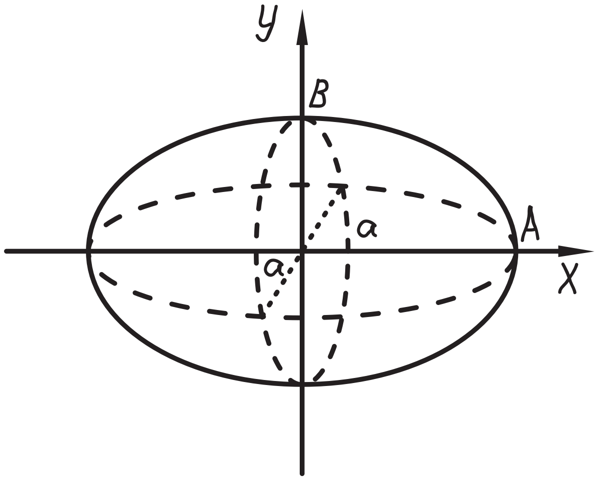
Timoti Gauers



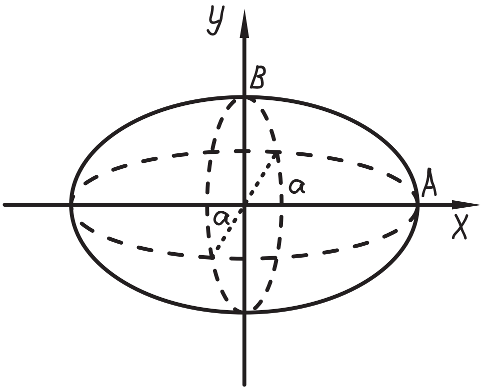
MATEMATIKA

SAŽETI PRIRUČNIK

Prevela
Jelena Kosovac

Laguna

Naslov originala
Timothy Gowers
MATHEMATICS
A Very Short Introduction



MATEMATIKA

SAŽETI PRIRUČNIK

Sadržaj

Predgovor

Početkom dvadesetog veka veliki matematičar Dejvid Hilbert primetio je da je određen broj važnih matematičkih argumenata sličan po svojoj strukturi. U stvari, shvatio je da se na odgovarajućem nivou opštosti svi mogu posmatrati kao da su isti. To zapažanje, kao i druga poput njega iznedrila su novu granu matematike, a jedan od njenih glavnih koncepata nazvan je po Hilbertu. Pojam Hilbertov prostor razjašnjava štošta u modernoj matematici, od teorije brojeva do kvantne mehanike, pa se ne možete smatrati dobro obrazovanim matematičarem ako ne poznajete bar najosnovnije elemente teorije Hibertovog prostora.

Dakle, šta je Hilbertov prostor? Na tipičnom univerzitetskom kursu matematike definiše se kao kompletan prostor snabdeven skalarnim proizvodom. Od studenata koji pohađaju takav kurs očekuje se da poznaju, na osnovu kurseva koje su već pohađali, da je prostor sa skalarnim proizvodom vektorski prostor snabdeven skalarnim proizvodom (pred-Hilbertov prostor), te da je prostor kompletan ako svaki Košijev niz u njemu konvergira. Naravno, da bi ove definicije imale smisla, studenti takođe moraju da poznaju definicije vektorskog prostora, skalarnog proizvoda, Košijevog niza i konvergencije. Daćemo samo jednu definiciju (ne i najdužu): Košijev niz je niz x_1, $x_{2,}$ x_3 … takav da za svaki pozitivan broj ∈ postoji ceo broj N takav da je za bilo koja dva cela broja p i q veća od N rastojanje od x_p do x_q najviše ∈.

Ukratko, da bi bilo ikakve nade da ćete razumeti šta je Hilbertov prostor, prvo morate da naučite i savladate čitavu hijerarhiju pojmova na nižem nivou. To iziskuje, što nimalo ne iznenađuje, vreme i trud. Pošto isto važi za većinu najvažnijih matematičkih ideja, postoji ozbiljno ograničenje u vezi s onim što se može postići bilo kojom knjigom koja nastoji da ponudi dostupan uvod u matematiku, naročito onom knjigom koja treba da bude sažeta.

Nisam pokušao da pronađem pametan način zaobilaženja ove teškoće, već sam se usredsredio na drugačiju prepreku prenošenju matematičkog znanja. Ta prepreka, više filozofske nego tehničke prirode, razdvaja one kojima pojmovi kao što su beskonačnost, kvadratni koren iz minus jedan, dvadeset i šesta dimenzija i zakrivljen prostor ne izazivaju nelagodu od onih koji ih smatraju uznemiravajuće paradoksalnim. Moguće je rešiti se nelagode u vezi s ovim idejama bez uranjanja u tehničke pojedinosti, a ja ću pokušati da pokažem kako.

Ukoliko se za ovu knjigu može reći da ima poruku, ta poruka je da osoba treba da nauči da razmišlja apstraktno, jer kada to učini, zaista mnogi filozofski problemi naprosto iščeznu. U drugom poglavlju potanko ću objasniti šta podrazumevam pod apstraktnim metodom. U prvom poglavlju razmatra se poznatija i srodna vrsta apstrahovanja: proces izdvajanja suštinskih osobina iz problema u stvarnom svetu, čime se on pretvara u matematički problem. Ta dva poglavlja, uz treće, u kom pretresam šta se podrazumeva pod strogim dokazom, odnose se na matematiku u načelu.

Posle toga prelazim na konkretnije teme. U poslednjem poglavlju više se bavim matematičarima nego matematikom, te se ono po tome donekle razlikuje od ostalih. Preporučujem da se prvo pročita drugo poglavlje, pa onda ostala. No, nezavisno od toga, knjiga je uređena što je moguće manje hijerarhijski: sve do kraja knjige neću pretpostaviti da je čitalac razumeo i zapamtio sve što je bilo izloženo u prethodnim poglavljima.

Za čitanje ove knjige potrebno je vrlo malo prethodnog znanja – matematika iz srednje škole u Velikoj Britaniji ili njen ekvivalent trebalo bi da budu dovoljni. Ipak, od čitaoca očekujem bar neku zainteresovanost za ovu temu, umesto da se sam trudim da je pobudim. Upravo zato sam izbegao anegdote, karikature, uzvičnike, šaljive nazive poglavlja ili slike Mandelbrotovog skupa. Takođe sam zaobišao teme poput teorije haosa ili Gedelove teoreme, koje prekomerno zaokupljaju pažnju javnosti u poređenju s njihovim značajem u aktuelnom matematičkom istraživanju, a koje su ionako dobro obrađene u mnogim drugim knjigama. Umesto toga opredelio sam se za prizemnije teme i detaljno ih razmotrio da bih pokazao kako se mogu razumeti na sofisticiraniji način. Drugim rečima, moj cilj je bio da idem u dubinu pre nego u širinu, te sam pokušao da prenesem privlačnost poznate i potvrđene matematike puštajući je da govori sama za sebe.

Želim da zahvalim *Matematičkom institutu Klej* (Clay Mathematics Institute) i *Univerzitetu Prinston* (Princeton University) za podršku i gostoljubivost koje su mi pružili tokom pisanja jednog dela knjige. Veoma sam zahvalan Gilbertu Aderu, Rebeki Gauers, Emili Gauers, Džošui Kacu i Edmundu Tomasu što su čitali prethodne verzije. Mada su oni previše inteligentni i predobro upućeni da bi se svrstali u širu čitalačku publiku ovakve knjige, olakšanje je znati da ono što sam napisao jeste razumljivo bar nekima koji nisu matematičari. Zahvaljujući njihovim komentarima mnogo šta je poboljšano. Knjigu posvećujem Emili u nadi da će joj dati malu predstavu o tome šta radim po ceo dan.

Spisak dijagrama

Izdavač i autor izvinjavaju se zbog grešaka ili propusta u navedenom spisku. Ako stupite u kontakt s njima, biće više nego spremni da ih isprave prvom prilikom.

Prvo poglavlje

Modeli

Kako baciti kamen

Pretpostavite da stojite na ravnom tlu po mirnom danu i da u ruci držite kamen koji želite da bacite što je moguće dalje. S obzirom na to koliko snažno možete da ga hitnete, najvažnija odluka koju morate da donesete odnosiće se na ugao pod kojim kamen odlazi iz vaše ruke. Ako je ugao previše tup, kamen, mada će imati veliku horizontalnu brzinu, vrlo brzo će pasti na tlo i stoga neće imati mogućnost da baš daleko odmakne. Ako kamen bacite previsoko, dugo će se zadržati u vazduhu, ali tokom toga neće preći baš veliki deo puta. Očigledno je potreban nekakav kompromis.

Pokazuje se da je najbolji kompromis, do kojeg se dolazi kombinovanjem njutnovske fizike i određenog elementarnog računa, onoliko precizan koliko bismo mogli očekivati s obzirom na okolnosti: pravac kretanja kamena dok odlazi iz vaše šake treba da bude nagore pod uglom od 45 stepeni u odnosu na horizontalnu osnovu. Isti proračuni pokazuju da će kamen ocrtati parabolu dok leti kroz vazduh, a govore vam i kojom brzinom će putovati u bilo kom datom trenutku pošto ga hitnete.

Dakle, izgleda da nam spoj nauke i matematike omogućava da predvidimo celokupno ponašanje kamena od trenutka bacanja do trenutka njegovog pada na zemlju. Međutim, to jeste tako samo ako smo spremni da formiramo nekoliko pojednostavljujućih pretpostavki, od kojih je najvažnija ta da jedina sila koja deluje na kamen jeste sila gravitacije i da ona svugde ima istu jačinu i pravac. Ali to nije istina, jer tako nismo uzeli u obzir otpor vazduha, Zemljinu rotaciju, mali uticaj gravitacione sile Meseca, činjenicu da je gravitaciono polje Zemlje slabije što ste na većoj visini i postepeno menjanje „vertikalno nadole" pravca dok se krećemo od jednog dela Zemljine površine ka drugom. Čak i ako prihvatimo proračune, preporuka od 45 stepeni zasnovana je na drugoj prećutnoj pretpostavci – da brzina kamena dok odlazi iz vaše ruke ne zavisi od njegovog pravca. I opet, to nije istina: kamen može da se baci jače kada je ugao pod kojim se baca manji.

S obzirom na ove primedbe, od kojih su neke očito ozbiljnije od drugih, kakav stav treba zauzeti prema proračunima i predviđanjima koja slede iz njih? Jedan pristup bio bi uzimanje u obzir što je moguće više ovih primedaba. Međutim, mnogo razumniji pristup sasvim je suprotan: odlučiti koji stepen tačnosti vam je potreban, a onda pokušati da ga postignete na što jednostavniji mogući način. Ako iz iskustva znate da će pojednostavljujuća pretpostavka imati samo mali uticaj na rezultat, treba da oformite takvu pretpostavku.

Na primer, uticaj otpora vazduha na kamen biće prilično mali zato što je kamen mali, čvrst i dosta kompaktan. Nema mnogo smisla komplikovati proračune uzimanjem u obzir otpora vazduha kada će ionako najverovatnije biti znatne greške u uglu pod kojim će kamen naposletku biti bačen. Ako želite da ga uzmete u obzir, u svakom pogledu je sledeće praktično pravilo dovoljno dobro: što je veći otpor vazduha, ugao pod kojim bacate kamen treba da bude što manji da biste kompenzovali otpor vazduha.

Šta je matematički model?

Kada se ispituje rešenje nekog fizičkog problema, obično je moguće jasno razgraničiti doprinose nauke od doprinosa matematike. Naučnici smišljaju teoriju, delom zasnovanu na rezultatima opažanja i eksperimenata, a delom na uopštenijim razmatranjima koja se odnose na jednostavnost teorije i njenu eksplanatornu moć. Zatim matematičari, ili naučnici koji koriste matematiku, ispituju isključivo logičke posledice date teorije. Ponekad su one rezultati rutinskih proračuna koji tačno previđaju vrste pojava koje osmišljena teorija treba da objasni, ali nekad predviđanja teorije mogu da budu prilično neočekivana. Ako kasnije budu eksperimentalno potvrđena, tada posedujemo impresivan dokaz u prilog datoj teoriji.

Međutim, pojam potvrđivanja naučne teorije donekle je problematičan zbog potrebe za pojednostavljivanjima o kojima sam govorio. Navešćemo drugi primer. Naime, Njutnovi zakoni kretanja i zakon gravitacije impliciraju da će dva predmeta, ako ih bacite s iste visine, pasti na tlo (ako je ravno) u isto vreme. Ova pojava, na koju je prvi ukazao Galilej, ponešto je kontraintuitivna. U stvari, nije samo kontraintuitivna već gore od toga: ako sami probate to da izvedete, recimo lopticom za golf i lopticom za stoni tenis, otkrićete da loptica za golf prva pada na tlo. Dakle, u kom smislu je Galilej bio u pravu?

Reč je, naravno, o otporu vazduha, ali zbog njega nećemo ovaj mali eksperiment smatrati pobijanjem Galileja: iskustvo pokazuje da teorija dobro funkcioniše kada je otpor vazduha mali. Ako mislite da je previše zgodno da otpor vazduha priskoči u pomoć svaki put kada su predviđanja njutnovske mehanike pogrešna, svoju veru u nauku i divljenje prema Galileju povratićete ako vam se ukaže prilika da posmatrate pero kako pada u vakuumu – ono stvarno pada isto onako kao što bi padao kamen.

Ipak, pošto naučne opservacije nikada nisu potpuno direktne i konkluzivne, potreban nam je bolji način da opišemo odnos između nauke i matematike. Matematičari ne primenjuju naučne teorije direktno na svet, već na *modele*. O modelu u ovom smislu može se razmišljati kao o zamišljenoj pojednostavljenoj verziji dela sveta koji se proučava, verziji u kojoj su tačni proračuni mogući. U slučaju kamena, odnos između sveta i modela otprilike je nalik odnosu između slike 1 i slike 2.

1. Lopta u letu I

2. Lopta u letu II

Postoji mnogo načina formiranja modela date fizičke situacije, a mi moramo da koristimo spoj iskustva i daljeg teorijskog razmatranja da bismo odlučili čemu će nas dotični model najverovatnije naučiti o samom svetu. Kada biramo model, jedan prioritet jeste da njegovo ponašanje učinimo takvim da što više odgovara aktuelnom, opaženom ponašanju stvarnog sveta. Međutim, drugi činioci, kao što su jednostavnost i matematička elegantnost, često mogu da budu važniji. I zaista, postoje veoma korisni modeli koji gotovo uopšte nemaju sličnosti sa stvarnim svetom, kao što će pokazati neki primeri koje navodim.

Bacanje para kockica

Ako bacim par kockica i želim da znam kako će se ponašati, iskustvo mi govori da postoje određena pitanja na koja je nerealno očekivati da se dobije odgovor. Na primer, ni od koga se ne može očekivati da mi unapred kaže ishod datog bacanja, čak i ako oni od kojih se to traži raspolažu skupom tehnologijom a kockice će bacati mašina. Nasuprot tome, na pitanja koja se tiču verovatnoće, kao što je pitanje „Koja je verovatnoća da će zbir brojeva na kockicama biti sedam?“, obično se može odgovoriti, a odgovori mogu da budu korisni ako, na primer, igram bekgemon za novac. Za ovu drugu vrstu pitanja situacija se vrlo jednostavno može predstaviti modelom bacanja kockica kao nasumičnog izbora jednog od sledećih 36 parova brojeva.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Prvi broj u svakom paru predstavlja broj koji se pojavljuje na prvoj kockici, a drugi broj je onaj s druge kockice. Pošto se tačno šest od ovih parova sastoji od dva broja čiji je zbir sedam, šanse da se prilikom bacanja dobije sedam jesu šest u trideset i šest, ili jedna u šest.

Ovom modelu moglo bi se prigovoriti na osnovu toga što se kockice, kada su bačene, pokoravaju Njutnovim zakonima, bar u veoma visokom stepenu preciznosti, pa je tako način na koji padaju sve sem nasumičan: uistinu, on se u principu može proračunati. No, izraz „u principu“ ovde nema pravi smisao pošto bi proračuni bili izuzetno komplikovani i morali bi da se zasnivaju na preciznijim podacima o obliku, sastavu, početnim brzinama i rotacijama kockica nego što bi oni ikada mogli da budu dobijeni u praksi. Upravo zbog toga nema nikakve prednosti u korišćenju nekog složenijeg determinističkog modela.

Predviđanje porasta stanovništva

„Mekše“ nauke, kao što su biologija i ekonomija, prepune su matematičkih modela koji su mnogo

Timoti Gauers

MATEMATIKA

Sažeti priručnik

Za izdavača
Dejan Papić

Urednik
Srđan Krstić

Lektura i korektura
Jelka Jovanović, Saša Novaković, Dragoslav Basta

Slog i prelom
Saša Dimitrijević

Dizajn korica
Snena Karić

Tiraž
1500

Beograd 2019.

Štampa i povez
Margo-art, Beograd

Izdavač
LAGUNA, Beograd, Resavska 33
Klub čitalaca: 011/3341-711
www.laguna.rs
e-mail: info@laguna.rs

CIP – Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд

51(02.063)

ГАУЕРС, Тимоти, 1963-
Matematika : sažeti priručnik / Timoti Gauers ; prevela Jelena Kosovac. - Beograd : Laguna, 2019 (Beograd : Margo-art). - 199 str. : ilustr. ; 20 cm

Prevod dela: Mathematics / Timothy Gowers. - Tiraž 1.500. - Registar.

ISBN 978-86-521-3168-6

а) Математика (популарна наука)

COBISS.SR-ID 273893644