

Мирко и Бранка Дејић

**МАТЕМА
ТИЧКЕ
ПОСЛА
СТИЦЕ**

■ Laguna ■

Садржај

Предговор	7
Математика	11
Загревање	16
Решења – загревање	39
Златни век грчке математике	51
Мозгалице	61
Решења – мозгалице	79
Историјат неких математичких симбола и термина	91
Посластице	102
Решења – посластице	117
Кенигзбершки мостови	127
Главоломије	132
Решења – главоломије	141
Пушкинове цифре	144
Магични квадрати и друге магичне фигуре	147
Решења – магични квадрати и друге магичне фигуре	165
Записивање бројева помоћу канапа и штапа	169
Логика	175
Решења – логика	178
Логички парадокси	181

Легенда о шаховској табли	184
Ханојска кула	186
Математичке игре	189
Занимљиве математичке игре са шибицама.	203
Словенска (и српска) нумерација	211
Математичке скривалице са картама и бројевима	216
Домине	224
Решења – домине	229
Први механички сат у Москви, дело Србина Лазара Хиландарца	231
Геометрија са шибицама	235
Решења – геометрија са шибицама	244
Три вековна задатка	249

Предговор

Слободно можемо рећи да међу најзначајније факторе који утичу на наш однос према математици спада интересовање за њу. Поред наставе, која кроз своје различите облике највише доприноси буђењу интересовања за математику, снажно средство је тзв. *занимљива математика*. Садржаји занимљиве математике обухватају загонетке, досетке, занимљива мерења, магичне квадрате, елементе историје математике, анегдоте из живота великих математичара итд. Када су у питању проблеми и задаци из ове области, решења су неочекивана, текст је заводљив. Ови задаци излазе из оквира школских задатака, па се зову још и нестандартни. За њихово решавање често није потребно специјално математичко знање, већ се решавалац ослања на логичко мишљење, интуицију, а често и на „здрав разум“. Решавање проблема занимљиве математике има и следеће дидактичке вредности: активизација мисаоних процеса, подстицање самосталности, неговање критичности, развија се логичко, апстрактно и стваралачко мишљење, развија се оштроумност, досетљивост итд. Успешни решавачи постају и

они који немају видни успех у редовној настави, а тада постају самопоузданији и заинтересованији за математичке садржаје. Како је за решавање проблема често потребна дивитљивост, згодна досетка, размишљање... ова област изазива интелектуалну радозналост која шире отвара врата у науку.

Историја математике указује да је интересовање за занимљиве проблеме одувек постојало. У једном од најстаријих математичких рукописа, *Ахмесовој рачуници*, налазе се и задаци који имају чисто забавни карактер. Људи су се све до краја XIX века занимали и трагали за решењем популарних античких проблема какви су били квадратура круга, трисекција угла и удвајање коцке. Такође, врсни математичари су се занимали и решавали проблеме из домена занимљиве математике.

Књига коју држите у рукама намењена је свима који су при листању уочили бар једну ствар која их је заинтересовала. Може то бити неки занимљив проблем, нека математичка прича, историјска чињеница, математичка главоломка, досетка или једноставно уводни текст. Будите сигурни да ћете се заинтересовати и за остале садржаје.

Проблеми у овој књизи нису повезани, сваки је проблем и откриће за себе, па читалац може да чита ову књигу редоследом који сам одреди. Надамо се да ћете задатке из ове књиге радо решавати: они ће младима развијати дар за математику, а одраслима „оштри“ ум и скраћивати часове досаде.

За већину задатака дато је комплетно решење, упутство за решавање или резултат.

Напомена: Садржаје ове књиге аутори су користили у вишегодишњем раду са талентованим ученицима. Неки задаци и текстови представљају избор из већ објављених књига аутора, као и домаће и стране литературе, са домаћих и страних математичких такмичења. Многим задацима и текстовима аутори су дали лични печат, усклађујући их са наменом ове књиге.



Математика

(гр. *mathêmatikos* – научни, од *mathema* – знање)

Краљица наука, математика, једна је од најстаријих наука. Корени њеног развоја сежу до самих почетака људског постојања.

У почетку, човек је морао да броји и рачуна. Бројао је стоку у стаду, уловљену дивљач, дане, године итд.

Стари Египћани су морали сваке године да преме-равају земљиште које је плавила река Нил. Будући да је земљиште било издељено на парцеле облика геометријских фигура (квадрат, правоугаоник, троугао итд.), били су приморани да науче израчунавање површина тих фигура.

У средњем веку, путујући морима, морепловцима је била потребна математика да би знали куда се крећу.

Назив *mathema* је био у етимолошкој сродности са грчким називом *mathematika* (математички списи), од које потиче модеран назив *Математика*. Питагорејци су имали четири *matheme* (науке): аритметику, музику, геометрију и астрономију. Познато је да су Питагорејци своја знања чували у тајности и свако ко је нешто одао бивао је строго кажњаван. Ученик Хипас је одао тајну о проналаску ирационалног броја и зато је био убијен. Следбеници Хипаса себе су називали *Математичарима*

– приврженицима науке. И у Платоновој школи сви предмети који су се изучавали називани су *Matemata*.

Математика представља заједнички језик свих наука, технологије и других људских делатности. Иако је многи сврставају у природну науку, она то није. Њене истине нису искључиво истине о реалном свету. У реалном свету не постоји тачка, права, број, раван итд. Често једна иста математичка формула може да се примени на најразличитије реалне ситуације које имају иста структурна својства у логичком и квантитативном смислу.

Оно што математику интересује јесте само веза између величина неке појаве, без обзира на конкретна својства тих појава. У том смислу тачна је следећа дефиниција математике коју је дао француски математичар Поенкаре (1854–1912): „Математика, то је вештина назвати разне ствари истим именом.“

Предмет изучавања математике мењао се из епохе у епоху. Древна математика Египта, Кине, Вавилона и Индије изучавала је искључиво аритметику. Тада бисмо рекли да је математика наука о бројевима. Стари Грци претежно су се бавили геометријом, и бројеве су такође испитивали геометријским путем. У њихово време бисмо рекли да је математика наука о бројевима и геометријским облицима. Природа и предмет математике су се променили појавом Декартове (1596–1650) аналитичке геометрије, као и Њутновог (1642–1727) и Лајбницевог (1646–1716) диференцијалног и интегралног рачуна. У основи те математике налазили су се покрет и промена и настала је ера променљивих величина. Тада би се рекло да је математика наука која

проучава број, облик, кретање, промену и простор. На тој математици заснивале су се физика, механика и астрономија. Модерна математика, која настаје крајем XIX века, не бави се само праксом, тј. применом математике у различите сврхе, већ се стварају и теорије, као и сасвим нове гране математике. Почетком и током XX века јављају се многе апстрактне математичке теорије чији предмет изучавања не потпада под наведене дефиниције. Данас постоји стотину различитих математичких области. С обзиром на толику разноликост у поимању математике, веома је тешко дати одговоре на питања шта је то математика и чиме се бави. Можемо рећи да се математичка знања, у ширем смислу, односе на количинске односе (аритметика), структуре (алгебра), простор (геометрија) и промене (анализа).

Многи велики математичари инспирацију за своје апстрактне теорије црпили су из природних феномена. Апстракцијом постојећих веза које владају у стварности, математичари су стварали самосталне математичке објекте високе апстракције. Други ствараоци, према својим интересовањима, ишли су обрнутим путем – апстрактне математичке теорије користили су за истраживање стварности.

Математичар-стваралац не црпи инспирације само из природе. Многе математичке теорије створене само умом човека имају чврсту унутрашњу логику и структуру, а да немају, или бар у почетку немају никакву везу са праксом, нити су настале из праксе, нити се примењују у пракси. Показује се да високо апстрактне теорије, створене снагом ума, касније налазе примену. Нееуклидска геометрија коју је створио велики руски

математичар Лобачевски (1793–1856) била је неразумљива његовим савременицима. Више од 2.200 година као вечна истина, са неприкосновеним ауторитетом, владала је еуклидска (Еуклид, око 325 – око 265 г. пре н. е.) геометрија. Људско искуство је прихватило Еуклидову геометрију и она је савршено функционисала. Показало се да та геометрија није апсолутна. Стваралачки ум Лобачевског, у појединим деловима своје теорије, каже Еуклидовој геометрији „не“, а опет логичка тврђава те геометрије нема противуречности и налази примене у разним деловима физике. Показује се да је еуклидска геометрија у примени негде довољна, а да је негде замењује нееуклидска.

Зашто учим математику?

Питање је логично и нормално, јер већина не види сврху многих садржаја које уче у школи. На тај начин математика постаје мучитељица, а не пријатељица. Замислимо само једног лимара када не би знао да израчуна површину лима потребног за прављење неке гараже, или рецимо инжењера који није у стању да прорачуна максимално оптерећење носећих стубова на мосту. Чак и да не примењујемо знања која смо стекли у школи, математика нас учи да мислимо. Развија нам логику без које нећемо моћи успешно да радимо свој будући посао, било какав да је. Истрајност и упорност при решавању неког математичког задатка биће истрајност и упорност и у свакодневном животу, у свакој прилици. Учећи математику, развијамо осећај за лепо. Математика је свуда, у сликарству, архитектури, музици. „Математичар

постаје песник у души“; како је говорила велика руска математичарка С. В. Коваљевска (1850–1891). Учење математике омогућава нам брзо уочавање чињеница, богатство идеја, независно мишљење, лаку примену стечених знања, разликовање истине од лажи, тежњу ка савршенству, одговорност и амбициозност и много тога још.

На крају, убеђени смо да су сви способни да савладају математичке садржаје који су прописани на свим нивоима школовања, само треба упорно вежбати.



Загревање

1) Одговорите брзо

- (1) Пола од пола броја износи половину. Који је то број?
- (2) Колико је сада сати ако је преостали део дана 5 пута дужи од онога који је прошао?
- (3) Пре 10 година разлика између година оца и сина била је 22 године. Колико ће та разлика да буде за 10 година?
- (4) Шта има 22 ноге и 2 крила?
- (5) Драган има пун џак кукуруза. Тим кукурузом је напунио два џака који су исте величине као и његов. Како је то успео?
- (6) Како можете са три реза да пресечете буреку кружног облика тако да добијете 8 једнаких парчића?
- (7) Ако од четвороугла одсечемо један угао, колико углова остаје?
- (8) Имате два штапа, један је дугачак 7, а други 11 цм. Како можемо помоћу та два штапа да одмеримо дужину канапа од 15 цм?
- (9) Тегла са поклопцем стаје 10 динара. Тегла је за 8 динара скупља од поклопца. Колико стаје тегла, а колико поклопац?

- (10) „Петре, јуче сам те видео са неким у шетњи – ко је то био?“ Петар је одговорио: „Немам ни браћу ни сестре, а отац особе која је била са мном је син мог оца.“ Ко је то био са Петром?

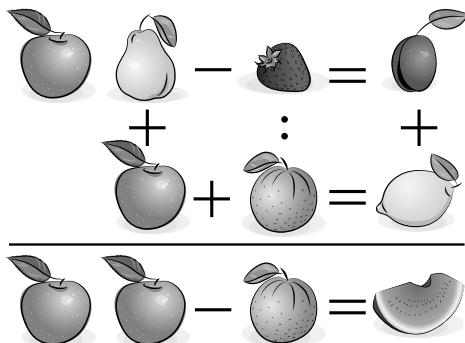
2) Растојање између два села

Између два села А и Б на сваком километру пута стоји табла на чијој једној страни је записано колико километара има од те табле до села А, а са друге стране колико километара има од те табле до села Б.

Како ћемо израчунати колико је растојање између села А и Б?

3) Које цифре крију воћке?

На слици је ребус са воћем. Једна воћка представља једну цифру, а треба да се открије која је то цифра. Две воћке, једна до друге, означавају двоцифрен број. Аритметичке операције спроводе се и хоризонтално и вертикално. Резултат операција по редовима дат је иза знака једнакости, а по колонама испод црте.



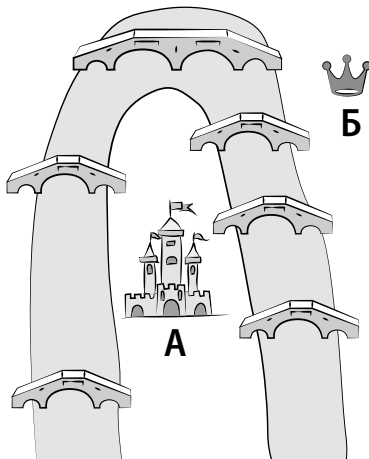
4) Из једног потеза

Без подизања оловке са папира нацртајте пут који пролази кроз све рамове свих правоугаоника. Истим путем смете да идете само једном.



5) Принц и принцеза

Принцеза се налази у тврђави А, опкољеној водом. Принц може да се ожени њоме, ако успе да пређе сваки од 6 мостова и то тако, да сваки мост прелази једном и само једном. Принц полази из тачке Б. Нађите путању којом треба да се креће принц да би дошао до принцезе.



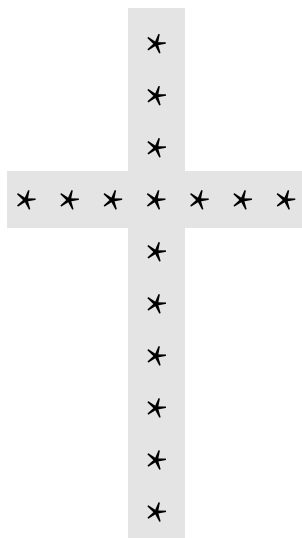
6) Распоред стрелица

Распоредите ове 4 стрелице тако да добијете 5 стрелица.



7) Крст

Стари калуђер је имао крст начињен од 16 драгих каменова. Сваког јутра је бројао да види да ли је сваки драги камен на свом месту. Знао је да броји само до 10 и зато је бројао: одоздо до врха, одоздо надесно и одоздо налево. Једнога дана лукави лопов који је посећивао манастир, досетком му украде два драга камена. Калуђер је следећег дана бројао три пута по 10 на свој начин и није приметио да је покраден.

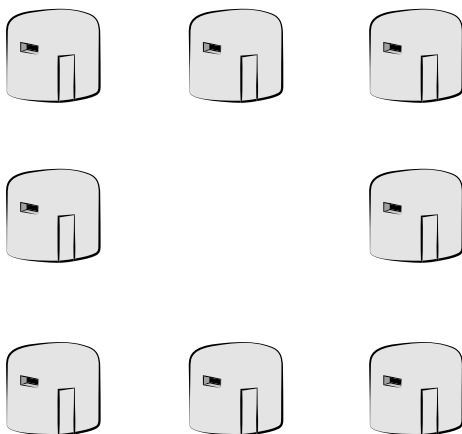


Како је то лопов са крста скунуо два драга камена, а да калуђер није приметио?

8) Распоред војника по бункерима

Капетан је наредио воднику да својих 16 војника распореди по бункерима, поређаним у квадратни облик, као на слици.

У свака три бункера, дуж страница квадрата, треба распоредити по 5 војника ако непријатељ нападне ноћу, а по 6 војника ако непријатељ нападне дању. Водник се нашао у чуду. Било му је тешко, јер је морао исти број војника да размешта, једном по 5, а једном по 6, по странама квадрата. Један од бистријих војника му је помогао да реши овај проблем. Како?



9) Распоред војника по собама

Официр је распоредио 20 приспелих војника по собама у касарни, као на слици. На свакој страни квадратне касарне налазило се по 7 војника. Сутрадан су младим војницима дошла 4 друга и решила да преноће у касарни.

2	3	2
3		3
2	3	2

Официр је увече пребројао војнике, видео је да их је по 7 на свакој страни касарне и закључио да има онолико војника колико је приспело у касарну. Сутрадан, другови који су дошли у посету наговорише четворицу војника из касарне да пођу са њима. Као и прошле вечери, официр је пребројавши војнике и видевши да по странама касарне опет има по 7 војника, закључио да су сви на броју.

Како су се војници распоредили у оба случаја – у првом случају њих 24, а у другом случају њих 16, тако да збир војника по странама касарне износи 7?

10) Распоред боца вина

Газда је у подруму распоредио 60 боца вина у квадратни орман са 9 преграда. Средња преграда је била празна.

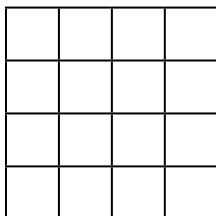
6	9	6
9		9
6	9	6

Слуга је приметио да газда свакодневно контролише број боца, бројећи по свакој страници квадрата и знајући да је збир свуда 21. Досетљиви слуга реши да га

поткраде. Узе 4 боце, а остале распореди тако да и даље збир боца по страницама квадрата буде 21. Газда је и даље бројао и ништа није примећивао. Слуги се осладило да краде, па узе још 4 флаше вина, а преостале распореди тако да збир флаша по ивицама квадрата буде 21. Овако је урадио укупно 4 пута. Како је он то ређао флаше да њихов збир по страницама квадрата увек буде 21?

11) Проблем 16 официра

Из 4 различите војне јединице изабрана су по 4 официра различитих чинова. Треба разместити тих 16 официра у касарне облика квадрата 4×4 тако да у сваком реду и у свакој колони буду смештена 4 официра из различитих јединица и са различитим чиновима.



Аналогним задатком бавио се чувени математичар Ојлер (1707–1783). У том задатку требало је 36 официра из 6 различитих пукова, носилаца 6 различитих чинова разместити у квадрат 6×6 , тако да се у сваком реду и свакој колони нађе представник из сваког пука и сваког чина. Ојлер је закључио да је овај задатак нерешив. Хипотеза о нерешивости доказана је 1901. године.

За Ојлера је проблем нерешив не само за квадрате реда 6, већ за све квадрате реда чији број при дељењу са 4 даје остатак 2. Тек 1960. године амерички математичари Паркер, Босе и Шрикхенд доказују да Ојлерова претпоставка није тачна. Они су нашли решење за квадрат реда 22.

12) Године оца и сина

Син је сада два пута млађи од оца. Син се родио када је оцу било 28 година. Колико сада има син, а колико отац година?

13) Моје и твоје године

Мени је сада два пута више година него што је теби било тада када је мени било толико година колико је теби сада. Када теби буде толико година колико је мени сада имаћемо обојица 63 године. Колико свако има година?

14) Године синова

Питали су оца колико година имају његова два сина. Отац је одговорио: „Ако произведу њихових година додате збир њихових година добићете 14.“ Колико година имају синови?

15) Вода и вино

У једном суду налази се вино, а у другом исто толико воде. Из првог суда узет је 1 литар вина и сипан у други

суд са водом. После тога, 1 литар мешавине из другог суда присут је у први суд. Чег а има више – воде у првом суду или вина у другом?

16) Краљеви синови

Краљ је имао два сина. Организовао им је такмичење. Поставио их је на 1000 метара од дворца и рекао да ће дворца да наследи онај син који до дворца својим коњем стигне последњи. Синови су се мучили и нико није желео да пође, јер побеђује чији коњ стигне последњи. После дужег времена наишао је један мудрац, нешто им је рекао, они су скочили на коње и појурили ка дворцу. Шта им је то саветовао мудрац?

17) Откривање лакших куглица

Десет кутија напуњено је куглицама истог облика. У 9 од њих све су масе по 10 грама, а у једној маса сваке куглице је 9 грама. Из једног мерења на ваги откријте у којој кутији су куглице по 9 грама.

18) Педесет од 40 без десет

Како можете да добијете 50, ако из 40 уклоните 10?

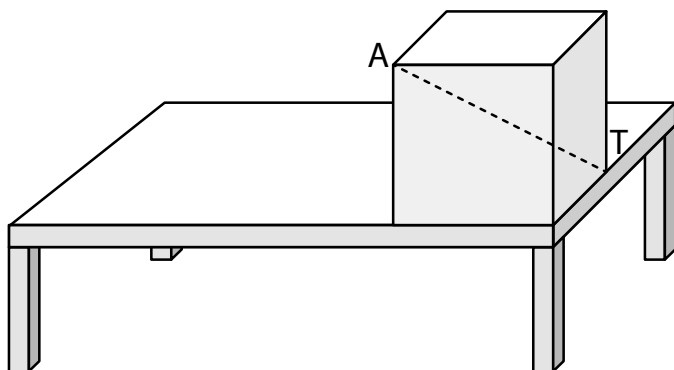
19) Где је нестало 100 динара?

Три друга су ручали у ресторану, а после тога требало је да плате 2.500 динара. Свако од њих је дао по 1.000 динара. Конобар им је вратио три новчанице по 100

динара и једну од 200 динара. Свако је узео назад по 100 динара, а како је било незгодно да поделе 200 динара одлучише да их дају конобару као част. Како је свако добио назад по 100 динара следи да је свако платио по 900 динара. $3 \times 900 = 2.700$. Ако овој суми додамо оних 200 динара части, укупно је 2.900 динара. Где се изгубило 100 динара, јер су другови дали по 1.000 динара?

20) Дијагонала

На столу се налази дрвена коцка. Како можете са лењиром да измерите дужину дијагонале AT ?

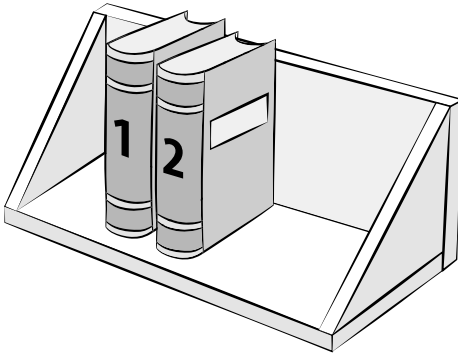


21) Поклон

Два оца поклонили су коње својим синовима. Један је дао свом сину 12 коња, а други свом сину 10 коња. Када су оба сина сабрала број коња које су добили укупно је било 12. Објасните то.

22) Листови

На полици библиотеке налазе се два дела енциклопедије, 1 и 2. Сваки део има по 250 листова. Колико има листова од првог листа првог дела до последњег листа другог дела?



23) Откривање цифара

Дат је троцифрен број АББ чији је производ цифара двоцифрен број АЦ, а производ ових цифара једноцифрен број Ц.

Одредите цифре А, Б, Ц.

24) Шифровани бројеви

Откријте које цифре крију слова. Иста слова означавају исте цифре:

$$\begin{array}{r}
 \text{У Д А Р} \\
 + \text{У Д А Р} \\
 \hline
 \text{Д Р А М А}
 \end{array}$$

25) Једнаки зборови

У квадратиће треба да упишете цифре од 1 до 9. Можете их ређати произвољно, али сви морају да се појаве. У један кружић уписујете знак =, а у остале кружиће знаке +. Бројеве треба тако да распоредите да са леве и десне стране знака једнакости буду једнаки зборови.

Може ли ово да се уради?

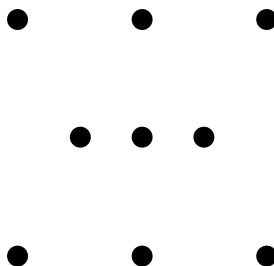
**26) Исправна множења**

Све цифре: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разместите у празна поља тако да оба примера множења буду исправна.

$$\begin{array}{r} \square \square \times \square \\ \hline \square \square \end{array} \quad \begin{array}{r} \square \square \times \square \\ \hline \square \square \end{array}$$

27) По три тачке

На слици је 9 тачака. Повежите их са 8 линија тако да на свакој линији буде тачно 3 тачке.

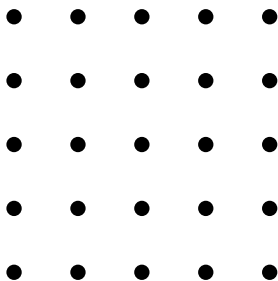


28) По 3 саднице

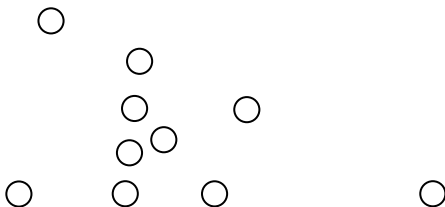
Воћњак је правоугаоног облика. Распоредите а) 8 садница; б) 9 садница; в) 10 садница; г) 11 садница; д) 12 садница, тако да на свакој ивици буде по 3 саднице.

29) Пут

Саднице јабука које су засађене у воћњаку означили смо тачкама. Свако јутро власник залива сваку воћку. Пут којим се креће има облик изломљене линије. Сваки део пута прелази само једном. Нацртајте тај пут.

**30) По 4 саднице**

На следећој слици 10 кругова приказују саднице у воћњаку. Направите 5 праволинијских стаза, али тако да свака стаза повезује по 4 саднице.

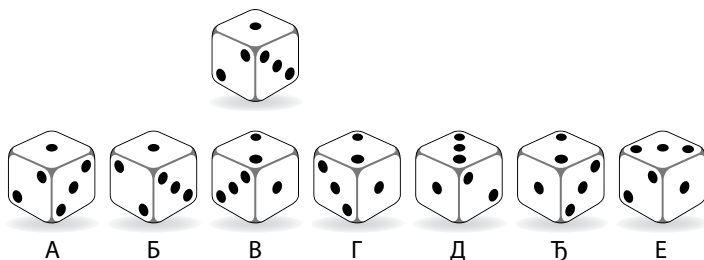


31) По 4 дрвета у реду

Вртлар је засадио 10 стабала и распоредио их је у 5 редова по 4 стабла у сваком реду. Како је то урадио?

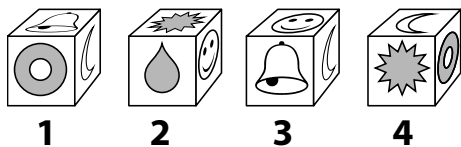
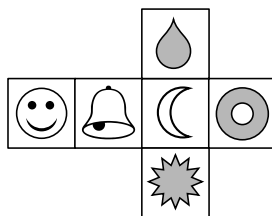
32) Коцка

Међу коцкама означеним словима пронађите оне које представљају дату коцку.

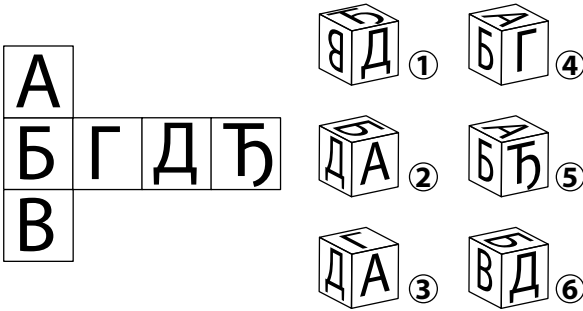
**33) Мрежа коцке**

Којој од нумерисаних коцки припада дата мрежа?

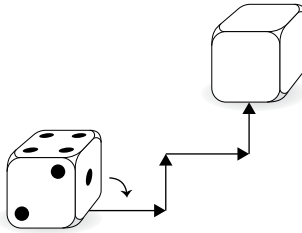
а)



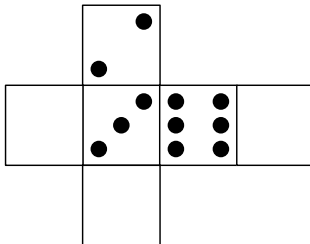
б)

**34) Тачке на коцки**

Видљиве стране на коцки имају 2, 4 и 1 тачку. Ако коцку окрећемо у назначеним смеровима, које су видљиве тачке на последњем положају? Нацртајте их.

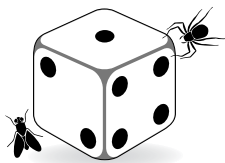
**35) Тачке на мрежи коцке**

Наставите да тачкама попуњавате стране на мрежи коцке.



36) Мува и паук

На два најудаљенија темена коцке за игру стоје мува и паук. Који је најкраћи пут којим паук може да стигне до муве и улови је?



37) Пице

Ако 40 Италијана испече 20 пица за 2 сата, за које време ће два Италијана да испеку 10 пица?

38) Мимоилажење бродова

Каналом плове 4 брода, два у једном, а два у другом смеру. Канал је толико узак да се не могу мимоићи. Међутим, ту је помоћно проширење канала у које може да стане само један брод.

Како могу да се мимоиђу бродови да би наставили да плове својим путем?

